

Тарасова В.В.¹, Тарасов В.Е.²©¹ Студент, ² Доктор физико-математических наук,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова**ЦЕНОВАЯ ЭЛАСТИЧНОСТЬ СПРОСА С ПАМЯТЬЮ****Аннотация**

Цель статьи – определение обобщения точечной ценовой эластичности спроса, учитывающего наличие у покупателей памяти об изменениях спроса и цен в течение некоторого интервала времени. Для упрощения, мы предполагаем существование одного параметра, который характеризует степень затухания памяти с течением времени. Для математического описания степенного характера затухающей памяти на конечном интервале, мы применяем производные нецелых порядков. В статье описаны свойства предлагаемых индикаторов – ценовых эластичностей спроса с памятью. Приведены примеры расчетов предложенных эластичностей спроса с памятью.

1. Введение

Одним из важнейших экономических индикаторов является ценовая эластичность спроса. Этот индикатор показывает относительное изменение спроса в зависимости от изменения цены при неизменности других факторов. В стандартном определении ценовой эластичности игнорируется возможное влияние эффектов памяти. Например, стандартная точечная ценовая эластичность спроса в момент времени $t = t_0$, может быть определена следующими уравнениями

$$E_1(Q(t); P(t); t_0) = \left(\frac{P(t)}{Q(t)} \frac{dQ/dt}{dP/dt} \right)_{t=t_0} \quad E_2(Q(P(t)); t_0) = \left(\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} \right)_{t=t_0}, \quad (1)$$

где Q – величина спроса и P – цена товара. Правило дифференцирования сложной функции ($dQ(P(t))/dt = (dQ/dP)(dP/dt)$) приводит к равенству этих двух выражений ($E_1(Q(t); P(t); t_0) = E_2(Q(P(t)); t_0)$). Уравнение (1) предполагает, что эластичность спроса зависит только от цены в момент времени $t = t_0$, и в инфинитезимально малой окрестности t_0 . В общем случае, мы должны учитывать, что спрос может зависеть от всех изменений цены в течение некоторого конечного интервала времени. Это обусловлено тем, что поведение покупателей может определяться наличием у них памяти об предыдущих изменениях цены на данный товар. Можно сказать, что определение (1) следует использовать только при условии, что все покупатели обладают полной амнезией. Очевидно, что данное приближение не всегда применимо.

В данной статье мы предлагаем обобщение точечной эластичности спроса, используя понятие производной нецелого порядка для устранения амнезии покупателей в стандартной концепции эластичности. Производные и интегралы нецелых порядков [1, 2, 3, 22, 23] позволяют описывать динамику систем и процессов, характеризующихся нелокальностью и памятью (например, смотрите [4, 5]). Различные модели финансовых и экономических процессов, которые базируются на применении производных и интегралов нецелого порядка недавно были предложены в работах [6]-[14]. В настоящее время известны различные типы производных нецелого порядка, которые были предложены Риманом, Лиувиллем, Грюнвальдом, Летниковым, Вейлем, Риссом, Капуто [1, 2, 22, 23]. Эти производные обладают набором нестандартных свойств [15]-[18], которые должны выполняться для всех типов производных нецелого порядка. Следует подчеркнуть, что нарушение стандартного правила Лейбница (правила дифференцирования произведения) является характеристическим свойством всех типов производных нецелого порядка [15, 18]. Стандартное выражение для дифференцирования

сложной функции (производной композиции двух функций) также нарушается [17]. Подчеркнем, что нестандартные свойства производной нецелого порядка позволяют описывать динамику процессов с памятью.

В данной статье предлагается использовать производные нецелого порядка для описания экономических индикаторов, которые учитывают эффекты памяти. Для упрощения нашего рассмотрения, мы будем предполагать, что затухание памяти может описываться одним параметром α , который характеризует степенное затухание памяти во времени. Используя производную Капуто порядка α на конечном интервале, будут определены некоторые неэквивалентные эластичности, позволяющие описывать различные виды памяти. Эти обобщения точечной эластичности спроса нельзя рассматривать как точечные эластичности, поскольку предлагаемые экономические индикаторы зависят от конечного интервала времени и/или области изменения цены.

2. Определения ценовой эластичности спроса с памятью

В данном разделе, мы определим обобщения точечной эластичности спроса на случай наличия у покупателей памяти об изменениях цены на товар. В этих обобщениях мы учитываем зависимость спроса не только от текущей цены (цены в данный момент времени), но и от изменений этой цены в некотором интервале. Мы будем рассматривать следующие формы конечно-интервальной памяти.

(1) В общем случае, спрос и цена могут зависеть от времени, то есть Q и P являются функциями от переменной $t \in [t_i; t_f]$. Отсутствие памяти (амнезия) означает, что величина спроса $Q(t)$ в момент времени $t = t_0 \in [t_i; t_f]$ определяется только ценой $P(t)$ в тот же момент времени $t = t_0$ и в инфинитезимальной окрестности $t = t_0$. Наличие памяти означает, что величина спроса $Q(t)$ зависит от значений цены $P(t)$ во все моменты времени t из некоторого конечного интервала $[t_i; t_f]$.

(2) Наличие памяти может также означать, что величина спроса $Q(P_0)$ в действительности зависит не только от цены P_0 , но зависит от цен P , которые были ранее в интервале $[P_i; P_f]$. В общем случае, временной параметр не может быть исключен в системе $Q(t)$ и $P(t)$ для получения явной зависимости Q от P в форме однозначной функции. Для строгого математического описания экономических процессов с памятью следует использовать интегро-дифференциальные уравнения, описывающие зависимость спроса $Q(t)$ от цены $P \in [P_i; P_f]$. Для определения упрощенного (феноменологического) экономического индикатора, который не предполагает построение динамической модели и получения этого интегро-дифференциального уравнения, можно использовать некоторую функцию $Q = Q(P)$.

Важнейшей особенностью памяти является свойство ее затухания (угасание памяти, "fading of memory") [19, 20, 21]. Для упрощения мы будем полагать, что существует один параметр α , который характеризует степень угасания памяти с течением времени. Для описания памяти можно использовать производные нецелого порядка. Существует много различных типов производных нецелого порядка, предложенные Риманом, Лиувиллем, Риссом, Капуто, Летником, Маршо, Сониным, Вейлем [1, 2, 22]. В данной статье мы используем производную Капуто. Основной отличительной особенностью этой производной является то, что производная Капуто от постоянной функции равна нулю. Мы используем именно этот тип производных для того, чтобы эластичность постоянного спроса была равна нулю, а это в свою очередь можно сопоставить совершенно неэластичный спрос (спрос не меняется при изменении цены).

Определение 1. Пусть величина спрос $Q = Q(t)$ и цена $P = P(t)$ являются функциями времени $t \in [t_i; t_f]$. Тогда T -эластичность $E_\alpha(Q(t); P(t); [t_i, t_0])$ порядка α в момент времени $t = t_0$ определяется уравнением

$$E_{\alpha}(Q(t); P(t); [t_i, t_0]) := \frac{P(t_0)}{Q(t_0)} \frac{{}_i^C D_{t_0}^{\alpha} [t] Q(t)}{{}_i^C D_{t_0}^{\alpha} [t] P(t)}, \quad (2)$$

где ${}_i^C D_{t_0}^{\alpha} [t]$ – левосторонняя производная Капуто порядка α , которая определяется выражением

$${}_i^C D_{t_i}^{\alpha} [t] f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{(t_0-t)^{1-n+\alpha}} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \quad (3)$$

где $t \in [t_i, t_0]$, и $t_i < t_0 < t_f$.

Предлагаемая Т-эластичность (2) описывает эластичность спроса для процессов в экономических системах с памятью. Это индикатор позволяет учитывать, что покупатели помнят какие цены и спрос на данный товар были ранее. Уравнение (2) учитывает зависимость величины спроса Q не только от цены $P = P(t_0)$ в настоящий момент времени t_0 , но и от цен $P(t)$, которые были до этого момента времени, то есть цен для $t \in [t_i; t_0]$. Параметр α характеризует степень затухания памяти во времени. В общем случае, можно рассматривать обобщение эластичности с двумя различными параметрами α и β для описания затухания памяти о спросе $Q(t)$ в предыдущие моменты времени $t \in [t_i; t_0]$, и затухания памяти о цене $P(t)$ в предыдущие моменты времени $t \in [t_i; t_0]$, соответственно.

Определение 2. Предположим, что величина спроса $Q = Q(P)$ представлена как функция цены $P \in [P_l; P_h]$. Левосторонняя и правосторонняя P -эластичности $E_{\alpha,l}(Q(P); [P_l, P_0])$ и $E_{\alpha,r}(Q(P); [P_0, P_h])$ порядка α при цене $P_0 \in [P_l; P_h]$ для спроса $Q = Q(P)$ определяются уравнениями

$$E_{\alpha,l}(Q(P); [P_l, P_0]) := \frac{(P_0)^{\alpha}}{Q(P_0)} {}_{P_l}^C D_{P_0}^{\alpha} [P] Q(P), \quad (4)$$

$$E_{\alpha,r}(Q(P); [P_0, P_h]) := \frac{(P_0)^{\alpha}}{Q(P_0)} {}_{P_0}^C D_{P_h}^{\alpha} [P] Q(P), \quad (5)$$

где $P_l = P_{\min}$ – наименьшая цена и $P_h = P_{\max}$ – наибольшая цена, ${}_{P_l}^C D_{P_0}^{\alpha}$ и ${}_{P_0}^C D_{P_h}^{\alpha}$ – левосторонняя и правосторонняя производные Капуто порядка $\alpha > 0$, которые определяются уравнениями

$${}_{P_l}^C D_{P_0}^{\alpha} [P] Q(P) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{P_l}^{P_0} \frac{dP}{(P_0-P)^{1-n+\alpha}} \left(\frac{d}{dP}\right)^n Q(P) \quad (P > P_l), \quad (6)$$

$${}_{P_0}^C D_{P_h}^{\alpha} [P] Q(P) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{P_0}^{P_h} \frac{dP}{(P-P_0)^{1-n+\alpha}} \left(-\frac{d}{dP}\right)^n Q(P), \quad (P < P_h). \quad (7)$$

Экономические индикаторы (4) и (5) позволяют описать эластичность спроса для покупателей с памятью. Левосторонняя эластичность (4) учитывает "память понижения цены" ("память более низких цен"). Правосторонняя эластичность (5) учитывает "память повышения цены" ("память более высоких цен"). Эти типы памяти описывают зависимость спроса Q не только от текущей цены P_0 , но и от всех цен P из данного диапазона цен ($P_l \leq P \leq P_h$). Порядок α характеризует степень затухания (угасания) памяти спроса и цены за данный товар. В общем случае, можно рассматривать левостороннюю и правостороннюю эластичности с двумя различными параметрами α и β для описания различного затухания памяти о спросе $Q(t)$ в зависимости от понижения или повышения цены соответственно.

Используя формулу производной логарифма, стандартную точечную эластичность (1) спроса Q относительно цены P , можно представить как производную функции $f(t) = \ln(Q(t))$ по функции $g(t) = \ln(P(t))$ в виде

$$E(Q(t); P(t); t_0) := \left(\frac{df(t)}{dg(t)}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{d\ln(Q(t))}{d\ln(P(t))}\right)_{t=t_0}. \quad (8)$$

Для формулы (8) можно определить обобщение эластичности, применяя формулу производной нецелого порядка функции $f(t) = \ln(Q(t))$ по функции $g(t) = \ln(P(t))$ (см. раздел 18.2 в [1, 22] и/или раздел 2.5 в [2]).

Определение 3. Log-эластичность $E_{\alpha, \log}(Q(t); P(t); [t_i, t_0])$ порядка α для момента времени $t = t_0 \in [t_i, t_f]$ определяется уравнением

$$E_{\alpha, \log}(Q(t); P(t); [t_i, t_0]) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_i}^{t_0} d\tau \frac{dg(\tau)}{d\tau} \frac{f(\tau)}{(g(t)-g(\tau))^{\alpha+1-n}} \left(\frac{1}{dg(\tau)/d\tau} \frac{d}{d\tau} \right)^n f(\tau), \quad (t_0 > t_i), \quad (9)$$

где $n-1 \leq \alpha \leq n$, $f(t) = \ln(Q(t))$ и $g(t) = \ln(P(t))$.

Для случая памяти $\alpha = 1$, уравнения (2), (4) и (5) дают стандартные выражения

$$E_1(Q(t); P(t); [t_i, t_0]) = \frac{P(t_0)}{Q(P_0)} \left(\frac{dQ(t)/dt}{dP(t)/dt} \right)_{t=t_0}, \quad (10)$$

$$E_{1,l}(Q(P); [P_i, P_0]) = E_{1,r}(Q(P); [P_0, P_f]) = \frac{P_0}{Q(P_0)} \left(\frac{dQ(P)}{dP} \right)_{P=P_0}, \quad (11)$$

в которых эти точечные эластичности не зависят от времени и цены вне инфинитезимальной окрестности t_0 и P_0 . Это означает, что случай $\alpha = 1$ соответствует экономическим процессам без памяти.

Используя правило дифференцирования первого порядка для сложной функции

$$\frac{dQ(P(t))}{dt} = \left(\frac{dQ(P)}{dP} \right)_{P=P(t)} \frac{dP(t)}{dt}, \quad (12)$$

мы получим равенство предложенных Т- и Р- эластичностей для случая $\alpha = 1$,

$$E_1(Q(t); P(t); [t_i, t_0]) = E_{1,l}(Q(P); [P_i, P_0]) = E_{1,r}(Q(P); [P_0, P_f]). \quad (13)$$

Этот случай соответствует экономическим процессам без памяти, т.е. с полной амнезией. Другими словами стандартная точечная эластичность спроса Q относительно цены P описывает экономическое поведение участником (покупателями) обладающих амнезией.

Для описания свойств ценовых эластичностей спроса с памятью и для возможности вычислять эти индикаторы, можно использовать следующие свойства производной Капуто порядка α .

1) Левосторонняя и правосторонняя производные Капуто являются линейными операторами

$${}_a^C D_t^\alpha (c_1 Q_1(t) + c_2 Q_2(t)) = c_1 {}_a^C D_t^\alpha Q_1(t) + c_2 {}_a^C D_t^\alpha Q_2(t). \quad (14)$$

2) Производные Капуто нецелого порядка для степенной функции задаются (см. Свойство 2.16 в книге [2]) уравнениями

$${}_a^C D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}, \quad (t > a, n-1 < \alpha < n, \beta > n-1), \quad (15)$$

$${}_t^C D_b^\alpha (b-t)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (b-t)^{\beta-\alpha}, \quad (t < b, n-1 < \alpha < n, \beta > n-1), \quad (16)$$

и

$${}_a^C D_t^\alpha (t-a)^k = 0, \quad {}_t^C D_b^\alpha (b-t)^k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (17)$$

В частности, имеем

$${}_0^C D_t^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}, \quad (t > 0, n-1 < \alpha < n, \beta > n-1), \quad (18)$$

$${}_0^C D_t^\alpha t^\alpha = \Gamma(\alpha+1), \quad ({}_0^C D_t^\alpha)^n t^\alpha = 0. \quad (19)$$

Для случая $a = 0$, можно использовать

$${}_a^C D_t^\alpha 1 = 0, \quad {}_t^C D_b^\alpha 1 = 0. \quad (20)$$

3) Действие производной Капуто на экспоненциальные функции задаются (см. Свойство 2.17 в [2]) в виде

$${}_{-\infty}^C D_t^\alpha e^{\lambda t} = \lambda^\alpha e^{\lambda t}, \quad (\lambda > 0), \quad (21)$$

$${}_t^C D_{+\infty}^\alpha e^{-\lambda t} = \lambda^\alpha e^{-\lambda t}, \quad (\lambda > 0). \quad (22)$$

4) Действие производной на обобщение экспоненциальной функции (см. Лемму 2.23 в [2]) имеет вид

$${}_a^C D_t^\alpha E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha] = \lambda E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha], \quad (23)$$

где $E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha]$ – функция Миттаг-Леффлера [2]. Уравнение (23) означает, что функция Миттаг-Леффлера инвариантна по отношению к левосторонней производной Капуто ${}_a^C D_t^\alpha$, однако она не инвариантна относительно действия правосторонней производной Капуто.

5) Производной Капуто нецелого порядка при действии на композицию двух функций нарушает стандартное правило дифференцирования сложной функции

$${}_a^C D_t^\alpha[\tau]Q(P(\tau)) \neq {}_a^C D_t^\alpha[P]Q(P) \cdot {}_a^C D_t^\alpha[\tau]P(\tau). \quad (24)$$

Нарушение стандартного правила дифференцирования композиции функций (дифференцирования сложной функции) является одним из основных свойств производных нецелого порядка [17].

6) Производной Капуто нецелого порядка, при действии на произведение функций, нарушает стандартное правило Лейбница

$${}_a^C D_t^\alpha[\tau](Q_1(\tau) Q_2(\tau)) \neq ({}_a^C D_t^\alpha[\tau]Q_1(\tau)) Q_2(\tau) + Q_1(\tau) ({}_a^C D_t^\alpha[\tau]Q_2(\tau)). \quad (25)$$

Отметим, что это неравенство является основным характеристическим свойством всех типов производных нецелых порядков [15, 18].

7) В общем случае повторное действие производной нецелого порядка α не равно действию производной порядка 2α ,

$${}_a^C D_t^\alpha[t'] {}_a^C D_t^\alpha[\tau]Q(\tau) \neq {}_a^C D_t^{2\alpha}[\tau]Q(\tau). \quad (26)$$

Это неравенство означает, что полугрупповое свойство не может выполняться для всех типов функций, для которых эти производные существуют. Равенство реализуется только для узкого класса функций [2].

3. Свойства ценовой эластичности спроса с памятью

Приведем основные свойства предлагаемых эластичностей спроса с памятью. Для простоты опишем эти свойства для случая $t_i = 0$ и $P_i = 0$.

1. Эластичности с памятью являются безразмерными экономическими индикаторами,

$$E_\alpha(\lambda Q(t); P(t); [0, t_0]) = E_\alpha(Q(t); P(t); [0, t_0]), \quad (27)$$

$$E_\alpha(Q(t); \lambda P(t); [0, t_0]) = E_\alpha(Q(t); P(t); [0, t_0]). \quad (28)$$

Эти уравнения означают, что эластичности не зависят от того в каких единицах измеряется спрос Q и цена P .

2. Т-эластичность обратной функции является обратной величиной

$$E_\alpha(P(t); Q(t); [0, t_0]) = \frac{1}{E_\alpha(Q(t); P(t); [0, t_0])}. \quad (29)$$

В общем случае, Р-эластичности нецелого порядка $\alpha \neq 1$ от обратной функции не является обратной величиной

$$E_{\alpha,l}(Q(P); [0, P_0]) \neq \frac{1}{E_\alpha(P(Q); [0, Q_0])}, \quad E_{\alpha,r}(Q(P); [P_0, P_f]) \neq \frac{1}{E_\alpha(P(Q); [Q_0, Q_f])}. \quad (30)$$

Это неравенство превращается в равенство для $\alpha = 1$.

3. В общем случае эластичности нецелых порядков для произведения двух функций, зависящих от одного и того же аргумента, не равны сумме эластичностей

$$E_\alpha(Q_1(t) \cdot Q_2(t); P(t); [0, t_0]) \neq E_\alpha(Q_1(t); P(t); [0, t_0]) + E_\alpha(Q_2(t); P(t); [0, t_0]), \quad (31)$$

если $\alpha \neq 1$. Это неравенство превращается в равенство для $\alpha = 1$. Неравенство (31) обусловлено нарушением правила Лейбница (25).

4. Эластичность нецелого порядка для суммы двух функций, зависящих от одного и того же аргумента, задается уравнением

$$\begin{aligned} E_\alpha(Q_1(t) + Q_2(t); P(t); [0, t_0]) = \\ = \frac{1}{Q_1 + Q_2} (Q_1(t) E_\alpha(Q_1(t); P(t); [0, t_0]) + Q_2(t) E_\alpha(Q_2(t); P(t); [0, t_0])). \end{aligned} \quad (32)$$

5. Эластичность нецелого порядка для постоянной функции является постоянной величиной

$$E_{\alpha,l}(P^\beta; [0, P_0]) = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (33)$$

где $\beta > n - 1$ и $n - 1 < \alpha < n$ для всех $n \in N$.

6. Эластичности нецелого порядка для экспоненциальной функции равны степенным функциям

$$E_{\alpha,r}(e^{-\lambda P}; [P_0; \infty)) = (\lambda P)^\alpha, \quad (34)$$

где $\lambda > 0$

7. Эластичности нецелого порядка для линейной функции задается формулой

$$E_{\alpha,l}(a_0 + a_1 P; [0, P_0]) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{a_1 P}{a_0 + a_1 P}. \quad (35)$$

8. Стандартная формула производной сложной функции не выполняется для производных нецелого порядка [17], а это приводит к неравенствам

$$E_\alpha(Q(t); P(t); [t_i, t_0]) \neq E_{\alpha,l}(Q(P); [P_i, P_0]), \quad (36)$$

$$E_\alpha(Q(t); P(t); [t_i, t_0]) \neq E_{\alpha,r}(Q(P); [P_0, P_f]) \quad (37)$$

для нецелых значений порядка α . В результате Р-эластичность и Т-эластичность должны рассматриваться как независимые экономические индикаторы в экономических процессах с памятью.

9) Эластичность нецелого порядка для постоянного спроса равна нулю

$$E_\alpha(const; P(t); [t_i, t_0]) = 0, \quad E_{\alpha,l}(const; [P_i, P_0]) = E_{\alpha,r}(const; [P_0, P_f]) = 0, \quad (38)$$

что соответствует совершенно неэластичному спросу.

Все приведенные свойства эластичностей спроса с памятью напрямую вытекают из свойств производной Капуто и определения этих эластичностей.

Замечание. В предлагаемых определениях эластичностей спроса с памятью, мы использовали производные Капуто, и другие типы производных не рассматривали. Это обусловлено тем, что действие производной Капуто нецелого порядка на постоянную функцию рано нулю. Это свойство приводит к нулевым значениям эластичностей для постоянного спроса. В противоположность этому, действие производной Римана-Лиувилля на постоянные функции не равно нулю (см. уравнение (2.1.20) в [2]),

$${}_0^{RL}D_P^\alpha [p'] Q(p') = \frac{p^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (39)$$

Поэтому эластичности спроса с памятью, которые были бы определены через производные Римана-Лиувилля, не могут быть рассмотрены как совершенная неэластичность спроса для постоянного спроса. Например, соответствующая левосторонняя Р-эластичность ${}_{RL}E_{\alpha,l}(Q(P); [0, P])$ нецелого порядка, определенная через производные Римана-Лиувилля, постоянного спроса $Q(P) = q_0 = const$ является ненулевой константой

$${}_{RL}E_{\alpha,l}(Q(P); [0, P]) = \frac{P^\alpha}{Q(P)} {}_0^{RL}D_P^\alpha [p'] Q(p') = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (40)$$

где ${}_0^{RL}D_P^\alpha$ – левосторонняя производная Римана-Лиувилля [2].

Подчеркнем, что Р-эластичности и Т-эластичности должны рассматриваться как независимые экономические индикаторы для систем с памятью, что обусловлено нарушением стандартного правила дифференцирования композиции функций для не целых порядков производных.

4.Примеры вычисления ценой эластичности спроса с памятью

Рассмотрим простой пример вычисления эластичности спроса с памятью. Для простоты, сначала воспользуемся следующим уравнением зависимости спроса от цены

$$Q(P) = a_0 + a_1 P + a_2 P^2, \quad (41)$$

где P – цена за единицу товара, а $Q(P)$ – величина спроса на товар при цене P .

Уравнение (41) рассматривается как функция спроса для некоторого товара. Стандартная

точечная эластичности спроса задается уравнением $E(P) = (P/Q(P))(dQ(P)/dP)$. Для вычисления точечной эластичности $E(P)$ спроса (41), мы используем производную первого порядка

$$\frac{dQ(P)}{dP} = a_1 + 2 a_2 P. \quad (42)$$

В результате стандартная (точечная) эластичность спроса равна

$$E(P) = \frac{P}{Q(P)} \frac{dQ(P)}{dP} = \frac{a_1 P + 2 a_2 P^2}{a_0 + a_1 P + a_2 P^2}. \quad (43)$$

Приведем некоторые примеры вычисления эластичностей нецелого порядка.

Пример 1. Рассмотрим P -эластичность (4) нецелого порядка $\alpha \in (0; 1)$ для $P_l = 0$ и спроса (41). Используя формулу (18), получаем

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_P^\alpha Q(P) &= {}^C_0 D_P^\alpha a_0 + a_1 {}^C_0 D_P^\alpha P + a_2 {}^C_0 D_P^\alpha P^2 = \\ &= a_1 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} P^{1-\alpha} + a_2 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} P^{2-\alpha}. \end{aligned} \quad (44)$$

Подстановка (44) в (4) дает левостороннюю P -эластичность нецелого порядка в виде

$$\begin{aligned} E_{\alpha,l}(Q(P); [0, P]) &= \frac{(P)^\alpha}{Q(P)} {}^C_0 D_P^\alpha [P] Q(P) = \frac{a_1 \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} P + a_2 \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} P^2}{a_0 + a_1 P + a_2 P^2} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{a_1 P + a_2 \frac{2}{2-\alpha} P^2}{a_0 + a_1 P + a_2 P^2}, \end{aligned} \quad (45)$$

где использовали $\Gamma(n+1) = n!$ для $n \in \mathbb{N}$ и $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Для случая $\alpha = 1$, уравнение (45) принимает вид (43).

Пример 2. Рассмотрим спрос и цену как функции времени в следующем виде

$$Q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2, \quad (46)$$

$$P(t) = p_0 t. \quad (47)$$

Очевидно, что подстановка (47) в (46) дает (41) с параметрами

$$a_0 = q_0, \quad a_1 = \frac{q_1}{p_0}, \quad a_2 = \frac{q_2}{p_0^2}. \quad (48)$$

Вычислим T -эластичность (2) для случая $t_i = 0$ и $\alpha \in (0; 1)$. Используя (18), получаем

$${}^C_0 D_t^\alpha Q(t) = q_1 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} + q_2 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha}, \quad (49)$$

$${}^C_0 D_t^\alpha P(t) = p_0 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha}. \quad (50)$$

Подстановка выражений (49) и (50) в уравнение (2) дает T -эластичность нецелого порядка

$$\begin{aligned} E_\alpha(Q(t); P(t); [0, t_0]) &= \frac{P(t) {}^C_0 D_t^\alpha Q(t)}{Q(t) {}^C_0 D_t^\alpha P(t)} = \frac{P_0 t}{q_0 + q_1 t + q_2 t^2} \frac{q_1 \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} + q_2 \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha}}{p_0 \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{P_0 t}{q_0 + q_1 t + q_2 t^2} \frac{q_1 t^{1-\alpha} + q_2 \frac{2}{(2-\alpha)} t^{2-\alpha}}{p_0 t^{1-\alpha}} = \frac{q_1 t + q_2 \frac{2}{(2-\alpha)} t^2}{q_0 + q_1 t + q_2 t^2} = \frac{a_1 P + a_2 \frac{2}{2-\alpha} P^2}{a_0 + a_1 P + a_2 P^2}, \end{aligned} \quad (51)$$

где использовали $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ и уравнения (47), (48).

Поскольку мы выбрали простые выражения для спроса и цены, (46) и (47) соответственно, то выражения (51) и (45) отличаются только на постоянный множитель

$$E_{\alpha,l}(Q(P); [0, P]) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} E_\alpha(Q(t); P(t); [0, t]). \quad (52)$$

В общем случае, эти эластичности нецелого порядка будут отличаться не только на множитель.

Пример 3. Рассмотрим спрос и цену в виде степенных функций простейшего вида

$$Q(t) = a t^\beta, \quad (53)$$

$$P(t) = b t^\gamma. \quad (54)$$

Подстановка (54) в (53) дает выражение

$$Q(P) = \frac{a}{b^{\beta/\gamma}} P^{\beta/\gamma}. \quad (55)$$

Стандартная (точечная) ценовая эластичность (143) спроса (55) имеет вид

$$E(P) = \frac{P}{Q(P)} \frac{dQ(P)}{dP} = \frac{\beta}{\gamma}. \quad (56)$$

Для спроса (55), Р-эластичность нецелого порядка задается в виде

$$E_{\alpha,l}(Q(P); [0, P]) = \frac{(P)^\alpha}{Q(P)} {}^C D_P^\alpha Q(P) = \frac{\Gamma(\beta/\gamma+1)}{\Gamma(\beta/\gamma+1-\alpha)}. \quad (57)$$

Используя (53) и (54), Т-эластичность записывается в виде

$$E_\alpha(Q(t); P(t); [0, t_0]) = \frac{P(t)}{Q(t)} \frac{{}^C D_t^\alpha Q(t)}{{}^C D_t^\alpha P(t)} = \frac{\Gamma(\beta+1) \Gamma(\gamma+1-\alpha)}{\Gamma(\gamma+1) \Gamma(\beta+1-\alpha)}. \quad (58)$$

Легко увидеть, что выражения Р-эластичности (57) и Т-эластичности (58) отличаются для $\alpha \neq 1$. Для $\alpha = 1$, мы получаем

$$E_\alpha(Q(t); P(t); [0, t_0]) = E_{\alpha,l}(Q(P); [0, P_0]) = E(P)$$

поскольку $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

5. Заключение

В данной статье предложены обобщения точечной эластичности спроса по цене, в которых учитывается, что покупатели обладают памятью и могут помнить, как менялся спрос и цена ранее. Предлагаемые экономические индикаторы описывают зависимость спроса не только в зависимости от текущей цены на товар, но и от изменения цены и спроса в некоторых интервалах. Мы полагаем, что стандартная точечная эластичность спроса от цены не отражает важных элементов реального поведения покупателей. Можно сказать, что стандартная точечная эластичность применима только, когда все покупатели обладают полной амнезией и ничего не помнят из того, что происходило со спросом и ценой ранее. В общем случае, нужно учитывать, что спрос может зависеть от того как менялась цена и сам спрос на товар в течение некоторого интервала времени, поскольку при описании поведения покупателей следует учитывать, что они могут помнить эти изменения. В качестве математического инструмента нами использовалась теория производных нецелого порядка. Предлагаемый подход может быть применен для определения и других экономических индикаторов, позволяющих учитывать эффекты памяти. Мы предполагаем, что развитие предложенного подхода к описанию реального поведения покупателей с памятью, может дать более адекватные экономические индикаторы, и привести к более точному описанию экономических процессов.

Литература

1. Samko, S.G.; Kilbas, A.A.; Marichev, O.I. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. New York: Gordon and Breach, 1993. – 1006с.
2. Kilbas, A.A.; Srivastava, H.M.; Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential. Equations Amsterdam: Elsevier, 2006. – 540с.
3. Podlubny, I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1998. – 340с.
4. Tarasov, V.E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. New York: Springer, 2011. – 505с.
5. Klafter, J.; Lim, S.C. ; Metzler, R. (Editors), Fractional Dynamics. Recent Advances. Singapore: World Scientific, 2011. – 515с.
6. Scalas, E.; Gorenflo, R.; Mainardi, F. Fractional calculus and continuous-time finance. // Physica A. – 2000. – Vol.284. – № 1-4. – P.376-384.
7. Laskin, N. Fractional market dynamics. // Physica A. – 2000. – Vol.287. – № 3. – P.482-492.
8. Mainardi, F.; Raberto, M.; Gorenflo, R.; Scalas, E. Fractional calculus and continuous-time finance II: The waiting-time distribution. // Physica A. – 2000. – Vol.287. – № 3-4. – P.468-481.
9. Gorenflo, R.; Mainardi, F.; Scalas, E.; Raberto, M. Fractional calculus and continuous-time finance III: the diffusion limit. // In: M. Kohlmann, S. Tang, (Eds.) Mathematical Finance Trends in Mathematics. Basel: Birkhauser, 2001. P.171-180.
10. Meerschaert, M.M.; Scalas, E. Coupled continuous time random walks in finance. // Physica A. – 2006. – Vol.370. – № 1. – P.114-118.

11. Skovranek, T.; Podlubny, I.; Petras, I. Modeling of the national economies in state-space: A fractional calculus approach. // *Economic Modelling*. – 2012. – Vol.29. – № 4. – P. 1322-1327.
12. Tenreiro Machado, J.A.; Mata, M.E. A fractional perspective to the bond graph modelling of world economies. // *Nonlinear Dynamics*. – 2015. – Vol.80. – № 4. – P. 1839-1852.
13. Tenreiro Machado, J.A.; Mata, M.E. Pseudo phase plane and fractional calculus modeling of western global economic downturn. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2015. – Vol.22. – № 1-3. – P. 396-406.
14. Tenreiro Machado, J.A.; Mata, M.E.; Lopes, A.M. Fractional state space analysis of economic systems. // *Entropy*. – 2015. – Vol.17. – № 8. P. 5402-5421.
15. Tarasov, V.E. No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2013. – Vol.18. – № 11. – P. 2945-2948.
16. Ortigueira, M.D.; Tenreiro Machado, J.A. What is a fractional derivative? // *Journal of Computational Physics*. – 2015. – Vol. 293. – P. 4-13.
17. Tarasov, V.E. On chain rule for fractional derivatives. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2016. – Vol. 30. – № 1-3. – P.1-4.
18. Tarasov, V.E. Leibniz rule and fractional derivatives of power functions. // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. – 2016. – Vol.11. – № 3. – P.031014. 4 с.
19. Volterra, V. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations*. New York: Dover, 1959. Chapter VI, Section IV. – 288с.
20. Wang, C.C. The principle of fading memory. // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1965. – Vol.18. – № 5. – P. 343-366.
21. Saut, J.C.; Joseph, D.D. Fading memory. // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1983. – Vol.81. – № 1. – P. 53-95.
22. Самко С.Г.; Килбас А.А., Марычев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения*. Минск: Наука и Техника, 1987. – 688с.
23. Учайкин В.В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок, 2008. – 512с.